На правах рукописи
УДК 517.977.55

САЗАНОВА Лариса Анатольевна

ОБ УПРАВЛЕНИИ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Сазанова

Екатеринбург – 2002

Работа выполнена на кафедре прикладной математики математико-механического факультета Уральского государственного университета им. А.М. Горького

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Э.Г. Альбрехт.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор А.Ф. Шориков; кандидат физико-математических наук, доцент М.Г. Близоруков.

Ведущая организация: Институт математики и механики УрО РАН.

Защита диссертации состоится 27 ноября 2002 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Уральском государственном университете им. А.М. Горького по адресу: 620083, г. Екатеринбург, К-83, пр. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского госуниверситета им. А.М. Горького.

Автореферат разослан 25 октября 2002 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, доцент В.Г. Пименов

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена задачам оптимального управления дискретными системами, возникающим в различных областях науки и техники. Важным классом задач дискретного управления являются задачи, в которых процесс описывается линейными разностными уравнениями. Изучение задач управления для линейных систем является полезным по следующим причинам: во-первых, многие реальные движения, описываемые нелинейными уравнениями, можно в 1-м приближении описать линейными уравнениями, что облегчает исследование. Во-вторых, для линейных систем известны аналитические выражения, определяющие движения соответствующих объектов. При этом линейность уравнений по координатам x_i и по компонентам управления u_j переходит в линейную зависимость движений от начальных условий, что позволяет привлечь к исследованию аппарат линейной алгебры и функционального анализа. Кроме того, в общем, нелинейном случае для решения задач управления часто применяется метод последовательной линеаризации, при помощи которого решение нелинейной задачи сводится к последовательности решений линейных задач.

Многочисленные публикации, посвящённые применению математического программирования в оптимальном управлении, рассматривают и линейные дискретные системы[1,2]. К настоящему времени теоретические аспекты вопросов управления и управляемости для дискретных линейных систем разработаны с достаточной полнотой, однако в конкретных вычислительных задачах практическое применение теории наталкивается на ряд трудностей. Так, если система (изначально вполне управляемая) подвержена влиянию случайных возмущений (например, присутствуют помехи в каналах обратной связи), то она может в некоторый момент времени уже не обладать свойством полной управляемости, и задача о приведении её оптимальным управлением в нужное состояние может оказаться неразрешимой. В этом случае естественно попытаться построить управление, приводящее линейную систему столь близко к заданному конечному состоянию, сколь это

[1]Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.

[2]Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. М.: Наука, 1975.

возможно в условиях данной задачи.

Помогает этого добиться применение понятия псевдообратной матрицы [3,4], позволяющее получить обобщение классических решений, наглядно представить структуру полученных результатов, уяснить смысл часто возникающей некорректности решения и увидеть пути регуляризации таких решений. Настоящая диссертация продолжает исследования в этом направлении.

Цель работы.

В диссертации рассмотрены несколько связанных между собой задач оптимального управления линейными дискретными системами. Были поставлены следующие цели:

1) Построить оптимальное программное управление, приводящее заданную линейную дискретную систему из указанного начального состояния в указанное конечное при условии минимума квадратичного по управлению функционала.

2) Обосновать предложенный в терминах псевдообратной матрицы способ построения синтеза оптимального управления для линейной дискретной системы. Изучить свойства оптимального синтеза, в частности, исследовать его устойчивость к помехам в каналах обратной связи.

3) Рассмотреть предыдущие вопросы при наличии запаздывания в каналах обратной связи.

4) Найти оптимальное по быстродействию программное управление при квадратичном ограничении на ресурсы управления. Построить и обосновать оптимальный синтез в задаче о быстродействии; доказать, что при определённых условиях он обладает свойством устойчивости.

5) Используя полученные результаты, найти решение задачи об управлении квазилинейной дискретной системой с конечным по величине квадратичным фуикционалом качества. Обосновать сходимость предложенной итерационной процедуры построения допустимого управления как предела последовательности решений линейных задач.

Методы исследования.

Применяются понятия и методы линейной алгебры, теории

[3] Фурасов В.Д. Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. М.: Наука, 1982.

[4] La Salle J.P. The Stability and Control of Discrete Processes. N.Y.: Springer-Verlag Inc., 1986.

устойчивости и управления, функционального анализа, а также численные методы.

Научная новизна.

С использованием псевдообратной матрицы разработан новый конструктивный метод анализа и синтеза управлений для линейных и квазилинейных дискретных систем при квадратичном по управлению критерии качества.

Теоретическая и практическая ценность.

Результаты работы имеют теоретическое и прикладное значение. Развитые в диссертации методы позволяют осуществлять синтез оптимального управления для линейных дискретных систем, исследовать его свойства, а также изучать вопросы управления квазилинейными дискретными системами.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на Всероссийской научной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (Екатеринбург, 2001), на 30-й и 31-й Региональных молодежных конференциях "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 1999, 2000).

Публикации.

Основные результаты диссертации представлены в трёх журнальных публикациях автора; по теме диссертации опубликовано также семь тезисов докладов на конференциях. Список публикаций * приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав и списка литературы, включающего 52 наименования. Общий объём диссертации – 95 стр.

Краткое содержание работы

ВВЕДЕНИЕ содержит историю вопроса, обоснование актуальности темы и краткий обзор работ. Для исследований в области управления дискретными системами характерно стремление к построению дискретной теории столь же полной, как и теория непрерывных систем. В монографии [5] содержатся постановки задач, ставшие классическими

*Работы выполнены при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 97-01-00371 и № 0001-00753

[5] Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука,

для дискретных управляемых систем, и методы их решения, а также применение к задачам дискретного управления принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Известны два основных аспекта общей проблемы управления.

1. Задача о программном управлении; при этом,как правило,требуется обеспечить желаемое качество процесса. В роли критерия качества часто выступает величина расходуемой энергии (квадратичный по управлению функционал). Важным случаем задач этого типа является проблема предельного быстродействия, рассмотрению дискретного варианта которой посвящены, в частности, работы [2,6].

Для указанного типа задач о построении оптимального программного управления характерно то, что дополнительная информация, которая может поступить в ходе процесса, не используется для коррекции движения. Это ограничивает роль соответствующих результатов и вынуждает рассмотреть проблему в следующем аспекте.

2. Задача о синтезе системы с обратной связью, где учитывается информация о текущем состоянии объекта. Синтез оптимального по быстродействию управления для линейной дискретной системы был найден в работе[6]. Вопросам устойчивости оптимального синтеза для дискретных систем посвящена вышеупомянутая монография [3]. Отметим также статью[7], где найден оптимальный синтез при постоянно действующих возмущениях, когда известна принадлежность их к определённому классу функций времени. Данная диссертационная работа отличается от вышеуказанных тем, что в ней систематически, на всех этапах используется понятие псевдообратной матрицы, и свойства оптимального синтеза исследуются через это понятие.

В ряде случаев задача оптимального управления осложняется эффектом запаздывания. Запаздывание может присутствовать как в уравнениях самой системы, так и в каналах обратной связи. Последний вариант имеет место, например, в связи с затратой времени на выполнение необходимых вычислений, на передачу сигнала. Оптимальный синтез в случае линейной системы с непрерывным

1973.

[6]Мороз А.И. Синтез оптимального по быстродействию управления для дискретных линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1965. №№ 2,3,8. С. 193-207, 410-426, 1324-1335.

[7]Кунцевич В.М. О синтезе оптимальных дискретных систем управления при постоянно действующих возмущениях // Автоматика и телемеханика. 1973. № 4. С. 60-69.

временем при наличии запаздывания в каналах обратной связи был найден Н.Н. Красовским [8]. Задачи описанного типа в случае линейных и нелинейных дискретных систем изучены меньше и представляют особый интерес. Среди работ, посвященных их решению, отметим [9] (в диссертационной работе используется алгоритм, отличающийся от предложенного там).

От решения задач об управлении линейными объектами возможен переход к нелинейным ситуациям, и первым шагом такого перехода является изучение квазилинейной системы, уравнения движения которой отличаются от линейных уравнений достаточно малыми нелинейными добавками. Один из подходов к изучению возможности построения управления нелинейными системами опирается на теоремы о существовании неподвижной точки. Исследованиям в области управления нелинейными системами с непрерывным временем посвящены, в частности, статьи [10,11]. При этом наиболее удобным для конкретных вычислений является случай, когда качество процесса оценивается квадратичным по управлению функционалом.

В ПЕРВОЙ ГЛАВЕ рассматривается задача приведения линейной дискретной системы в указанное конечное состояние при условии минимума квадратичного по управлению функционала. В §1.1 ставится

Задача 1.1. Построить оптимальное программное управление $u = u^0(k)$, переводящее линейную дискретную систему

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k = k_0, k_0+1, \dots, N-1 \tag{1}$$

из заданного начального состояния $x(k_0) = x_0$ в заданное конечное состояние $x(N) = x_1$ при условии

$$I[u] = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^{\top}(k)\, u(k) \to \min_u . \tag{2}$$

Здесь x – n-мерный вектор фазовых координат, u – m-мерный вектор управляющих сил, $A_{n\times n}$ и $B_{n\times m}$ – постоянные матрицы. Система (1)

[8] Красовский Н.Н. Об оптимальном регулировании при запаздывании сигналов обратной связи // Автоматика и телемеханика. 1963. Т. XXIV, Вып. 8. С. 1021-1036.

[9] Фам Хыу Шак. Об оптимальном управлении дискретными системами с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1970. Вып. 7. С. 40-49.

[10] Альбрехт Э.Г. Об управлении движением нелинейных систем // Труды II Болгарского нац. конгресса по теор. и прикл. механике. София. 1975. Т. 1. С. 522-526.

[11] Альбрехт Э.Г., Соболев О.Н. Синтез систем управления с минимальной энергией // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 10. С. 1611-1616.

предполагается вполне управляемой на отрезке $[k_0, N-1]$; согласно [4, 12], это означает, что выполняется следующее

Условие 1. Для того, чтобы система (1) была вполне управляема на отрезке $[k_0, N-1]$, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $[B, AB, A^2B, \dots, A^{N-1}B]$ был равен n.

Будем считать, что система (1) удовлетворяет данному условию вплоть до конца диссертационной работы, в каждой из поставленных в других главах задач (специально не оговаривая это).

Вводятся следующие обозначения:

$$c(k_0, x_0) = x_1 - A^{N-k_0}x_0, \quad S(k) = A^{N-k-1}B \quad (k_0 \le k \le N-1),$$
$$H^{(k_0)} = [S(k_0), S(k_0+1), \dots, S(N-1)].$$

Далее в терминах псевдообратной матрицы описан способ построения оптимального программного управления. Оно имеет вид:

$$u^0(k) = S^{\mathsf{T}}(k)\,\mathcal{D}^+(k_0)\,c(k_0, x_0)\,, \qquad k = k_0,\ k_0+1, \dots, N-1\,, \tag{3}$$

где $D(k_0) = \sum_{k=k_0}^{N-1} S(k)\,S^{\mathsf{T}}(k)$, $D^+(k_0)$ – матрица, псевдообратная к симметрической матрице $D(k_0)$.

В §1.2 дана постановка задачи о синтезе [13,14].

Задача 1.2. Будем предполагать, что в каждый текущий момент времени k нам известна реализация $x = x[k]$ фазового вектора x, и что управляющее воздействие u строится по принципу обратной связи, т.е. в виде функции $u[k] = u[k, x[k]]$ (здесь и далее через $x[k]$ и $u[k]$ будем обозначать реализовавшиеся как функции аргумента k траекторию и управление по принципу обратной связи). Заданы момент времени $k = N$ окончания процесса управления системой (1) и желаемое конечное состояние $x(N) = x_1$, в которое требуется привести систему к моменту $k = N$ допустимым управлением $u^0[k, x[k]]$. Момент начала процесса управления $0 \le k = k_0 \le N-1$ и исходное состояние $x(k_0) = x_0$, $-\infty < x_{i0} < +\infty$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ произвольны. Управление $u^0[k, x[k]]$ требуется выбрать так, чтобы при любом начальном состоянии $\{k_0, x_0\}$

[12] Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск: Ин-т математики АН Белоруссии, 2001.

[13] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

[14] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1969.

выполнялось неравенство

$$
\begin{aligned}
I\left[u^0;\, k_0,\, x_0\right] &= \sum_{k=k_0}^{N-1} u^{0\,\mathrm{T}}\left[k,\, x[k]\right] u^0\left[k,\, x[k]\right] \le \\
&\le I[u;\, k_0,\, x_0] = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^{\mathrm{T}}\left[k,\, x[k]\right] u\left[k,\, x[k]\right],
\end{aligned} \tag{4}
$$

каково бы ни было допустимое управление $u\big[k,\, x[k]\big]$, приводящее систему (1) в заданное конечное состояние. Под допустимыми управлениями будем понимать однозначные вектор-функции аргументов k, x. Рассмотрим управление

$$
u^0\big[k,\, x[k]\big] = S^{\mathrm{T}}(k)\,\mathcal{D}^{+}(k)\,c[k], \quad k = k_0,\, k_0+1, \ldots, N-1. \tag{5}
$$

Здесь

$$
c[k] = c\big[k,\, x[k]\big] = x_1 - A^{N-k}x[k], \quad \mathcal{D}(k) = \sum_{i=k}^{N-1} S(i)\,S^{\mathrm{T}}(i).
$$

В следующей теореме доказано, что (5) есть оптимальное управление по принципу обратной связи.

Теорема 1.1. *Пусть выполнено условие 1, и* $u^0(k)$ (3) *– оптимальное программное управление, переводящее систему* (1) *из состояния* $x(k_0) = x_0$ *в состояние* $x(N) = x_1$. *Тогда* $u^0(k)$ *и реализация управления, построенного по принципу обратной связи* $u^0\big[k,\, x[k]\big]$ (5) *вдоль оптимального движения* $x^0[k]$ *совпадают, т.е.*

$$
u^0\big[k,\, x^0[k]\big] = S^{\mathrm{T}}(k)\,\mathcal{D}^{+}(k)\,c[k] = u^0(k) = S^{\mathrm{T}}(k)\,\mathcal{D}^{+}(k_0)\,c(k_0)
$$

при всех $k = k_0,\, k_0+1, \ldots, N-1$.

Следовательно, $u^0\big[k,\, x[k]\big]$ (5) *– оптимальное управление, построенное по принципу обратной связи; при этом* $x^0[k] = x^0(k)$, $k = k_0,\, k_0+1, \ldots, N-1$.

Замечание. Предположим, что при заданных значениях x_0, x_1, k_0 и N условие 1 не выполняется. Если при этом вектор $c(k_0, x_0) = x_1 - A^{N-k_0}x_0$ принадлежит подпространству, натянутому на линейно независимые столбцы матрицы $H^{(k_0)}$, то оптимальное управление $u^0\big[k,\, x[k]\big]$ (5) приводит систему (1) в нужное состояние x_1. В противном случае конечное состояние $x^0(N)$ окажется настолько близким к точке x_1, насколько это возможно при заданных k_0, x_0, x_1, а также в зависимости от матриц A и B, но нельзя утверждать, что $x^0(N) = x_1$.

Свойства оптимального синтеза изучаются в §1.3. В частности, доказано, что при определенных условиях справедливы равенства, являющиеся аналогом первого интеграла в случае, когда процесс описывается системой дифференциальных уравнений (этот случай был рассмотрен в работе [11]).

Введём постоянный вектор

$$c \stackrel{def}{=} \mathcal{D}^{+}(k_0)\, c(k_0). \tag{6}$$

Теорема 1.2. *Пусть фиксировано некоторое значение* $\bar{k}$ $(k_0 \le \bar{k} \le N-1)$, *и вектор* c (6) *удовлетворяет условию* $c \in R\left(\mathcal{D}(\bar{k})\right)$, *где* $R\left(\mathcal{D}(\bar{k})\right)$ *– область значений матрицы* $\mathcal{D}(k)$. *Тогда справедливы равенства:*

$$\mathcal{D}^{+}(k_0)\, c[k_0] = \mathcal{D}^{+}(k_0+1)\, c[k_0+1] = \ldots = \mathcal{D}^{+}(\bar{k})\, c[\bar{k}] = c = \mathrm{const}.$$

Основным результатом §1.4 является доказательство устойчивости оптимального синтеза к помехам в каналах обратной связи. Предположим, что сигналы обратной связи, доставляющие в регулятор информацию о реализовавшихся значениях фазового вектора x в каждый текущий момент времени k, сопровождаются помехами $p(k)$, и возмущенное движение $y(k)$ управляемого объекта является решением системы первых разностей

$$y(k+1) = A\, y(k) + B\, u^0\left[k,\, y(k) + p(k)\right] \tag{7}$$

при начальном условии $y(k_0) = x_0 + p(k_0)$.

Определение. Оптимальный синтез $u^0\left[k, x[k]\right]$ *устойчив* при постоянно действующих возмущениях, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что возмущённое движение $y(k)$ системы (7), порождаемое начальным условием $y(k_0) = x_0 + p(k_0)$, при всех k таких, что $k_0 \le k \le N$, удовлетворяет неравенству

$$\|y(k) - x^0(k)\| < \varepsilon, \tag{8}$$

если только

$$\|p(k)\| < \delta \quad (k_0 \le k \le N-1). \tag{9}$$

Справедлива

Теорема 1.3. *Оптимальный синтез* $u^0\left[k, x[k]\right] = S^{\top}(k)\mathcal{D}^{+}(k)\, c[k]$, $k = k_0, k_0+1, \ldots, N-1$, *устойчив при постоянно действующих возмущениях, удовлетворяющих ограничению* (9).

Следствие 1.3. *При выполнении условий* (8), (9) *управление* $u^0\big[k,\, y(k)+p(k)\big]$ *удовлетворяет неравенству*

$$\Big\|u^0\big[k,\, x[k]\big]-u^0\big[k,\, y(k)+p(k)\big]\Big\|<\varepsilon \quad (k_0\le k\le N-1).$$

При этом оказывается, что если помехи присутствуют в течение всего времени управления системой, то построенный оптимальный синтез позволяет перевести систему, вообще говоря, лишь в сколь угодно малую ε-окрестность точки x_1, но не в саму точку.

В §1.5 приведены примеры нахождения оптимального синтеза в модели, описывающей боевые действия двух армий, и в задаче управления запасами.

ВО ВТОРОЙ ГЛАВЕ изучаются вопросы устойчивости оптимального синтеза в линейных дискретных системах при наличии запаздывания и возмущений в каналах обратной связи. В §2.1 дана постановка задачи и предложен метод её решения.

Задача 2.1. Требуется построить оптимальное управление по принципу обратной связи $u = u\big[k,\, x[k]\big]$, приводящее систему (1) из $x(k_0)= x_0$ в $x(N)=x_1$ и минимизирующее величину (4) при условии, что в каждый текущий момент времени k, $k_0\le k\le N-1$, в управляющее устройство подаётся недостаточная информация о текущем состоянии объекта. Иными словами, имеет место запаздывание h, $0\le h< N-k_0-1$, исключающее возможность точного задания в регулятор состояния объекта $x[k]$ и не зависящее от управления u. В момент $k=k_0$ точно известно начальное состояние системы $x(k_0) = x_0$. При $k-k_0 \ge h$ в регуляторе известны значения величин $x[k-h]$ и $u[k+l] = u\big[k+l,\, x[k+l]\big]$, $-h\le l<0$, а при $k-k_0<h$, соответственно, значения $x(k_0)$, $u[l]=u\big[l,\, x[l]\big]$, $k_0\le l<k$.

Для отыскания решения задачи используется метод Н.Н. Красовского и разработанная автором диссертации процедура вычисления оптимального управления в терминах псевдообратной матрицы. Построение оптимального управления при этом проводим в три этапа:

1) Решаем задачу о приведении системы (1) из $x(k_0) = x_0$ в $x(N)=x_1$ при условии (4) оптимальным управлением, построенным по принципу обратной связи, но в случае, когда запаздывание сигналов в каналах обратной связи отсутствует; находим оптимальное управление $u^0\big[k,\, x[k]\big]$;

2) Решаем задачу о прогнозе $x^*(k)$ величин $x[k]$ на время $\Delta k = h$ при $k-k_0\ge h$ и на время $\Delta k = k-k_0$ при $k-k_0<h$, используя доступную

в k-й момент времени информацию;

3) Оптимальное управление для первоначальной задачи получается из построенного в первом пункте $u^0[k, x[k]]$ введением в закон управления вместо неизвестных величин $x[k]$ их прогноза $x^*(k)$.

Устойчивость построенного оптимального синтеза по отношению к помехам в каналах обратной связи доказана в §2.2 в следующей теореме:

Теорема 2.1. *Оптимальный синтез* $u^0[k, x^*(k)] = S^{\mathrm{T}}(k)\mathcal{D}^+(k)\,c(k, x^*(k))$, $k = k_0, k_0+1, \ldots, N-1$, *при наличии запаздывания в каналах обратной связи устойчив при постоянно действующих возмущениях, удовлетворяющих условию* (9).

Следствие 2.1. *При выполнении условий* (8) *и* (9) *справедливы неравенства*:

$$\left\|x^0(k) - y^*(k)\right\| < \varepsilon,$$
$$\left\|u^0(k) - u^0\big[k, y^*(k) + p(k)\big]\right\| < \varepsilon \quad (k_0 \le k \le N-1)$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$.

Таким образом, прогноз состояния возмущенной системы, а также управляющее воздействие в каждый k-й момент сколь угодно мало отличаются, соответственно, от состояния и оптимального управления в задаче 1.1.

§2.3 содержит иллюстрирующий пример.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА посвящена решению задачи о быстродействии для линейной дискретной системы при квадратичном по управлению критерии качества. В §3.1 ставятся следующие задачи:

Задача 3.1. Заданы момент начала процесса управления $k = k_0$ и исходное состояние $x(k_0) = x_0$, а также желаемое конечное состояние $x(N) = x_1$. Требуется найти момент времени $N = N^0$ и соответствующее ему допустимое управление $u^0(k)$, $k_0 \le k \le N^0 - 1$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $u^0(k)$ переводит систему (1) из состояния $x(k_0) = x_0$ в состояние $x(N^0) = x_1$;

2) Выполняется ограничение на ресурсы управления:

$$I\big[u;\, N\big] = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^{\mathrm{T}}(k)\, u(k) \le \mu^2(k_0) \tag{10}$$

для $u(k) = u^0(k)$, $N = N^0$, где $\mu^2(k_0) > 0$ – заданное число;

3) Каковы бы ни были другой момент времени $N = \tilde{N}$ и допустимое

управление $u(k)$, $k_0 \le k \le \tilde{N}-1$, приводящее систему (1) из $x(k_0) = x_0$ в $x(\tilde{N}) = x_1$ при условии (10), должно выполняться неравенство: $N^0 \le \tilde{N}$.

Управление $u^0(k)$, $k_0 \le k \le N^0-1$, будем называть *оптимальным по быстродействию программным управлением*, а число $N^0 - k_0$, равное кратчайшему времени перехода системы из начального состояния x_0 в конечное состояние x_1, назовём *оптимальным временем переходного процесса*.

Задача 3.2. Предположим, что управляющее воздействие u строится по принципу обратной связи, $u = u\big[k,\, x[k]\big]$, а момент начала процесса управления $k = k_0$ и исходное состояние $x(k_0) = x_0$ произвольны. Задано желаемое конечное состояние x_1, и оговорено ограничение на ресурсы возможных управлений:

$$I\big[u;\, k_0;\, N\big] \;=\; \sum_{k=k_0}^{N-1} u^{\mathrm{T}}\big[k,\, x[k]\big]\, u\big[k,\, x[k]\big] \;\le\; \mu^2(k_0). \tag{11}$$

Требуется в классе допустимых управлений $u\big[k, x[k]\big]$ выбрать оптимальное управление $u^0\big[k, x[k]\big]$, которое из любого начального состояния $\{k_0,\, x_0\}$ обеспечивает наискорейшее приведение системы (1) в положение x_1 по сравнению с любым другим допустимым управлением, стеснённым условием (11).

Наискорейшее время переходного процесса $N^0\big(k, x[k]\big) - k$, $k \ge k_0$ будем называть *временем быстродействия* в задаче о синтезе, а соответствующее управление $u = u^0\big[k, x[k]\big]$ – *оптимальным управлением*, найденным по принципу обратной связи.

Далее описаны процедуры построения оптимального по быстродействию программного управления, а также синтеза оптимального управления. В частности, выбрав минимальное значение N ($N \ge k_0$), при котором выполняется неравенство (10) для управления с минимальной энергией, т.е.

$$I\big[u^0;\, N\big] - \mu^2(k_0) \le 0\,, \tag{12}$$

получаем время окончания процесса управления в задаче 3.1. При этом $(N^0 - k^0)$ – искомое оптимальное время переходного процесса, а соответствующее $u^0(k)$ (3) при $N = N^0$ – оптимальное программное управление.

Для отыскания оптимального синтеза по начальным данным $k_0,\, x_0,\, \mu^2(k_0)$ из неравенства (12) находим величину $N^0 = N^0(k_0,\, x_0)$

и сдвигаемся в точку $x[k_0+1]$, используя оптимальное управление $u^0[k_0, x_0]$ (3) (на первом шаге, очевидно, совпадающее с $u^0(k_0)$ (5) при $k = k_0$). Затем величина $N^0\big(k, x[k]\big)$, $k \geq k_0+1$, корректируется в соответствии с реализующимися значениями k, $x[k]$, $\mu^2[k]$. В частности, $N^0\big(k, x[k]\big)$ находится как наименьшее $N \geq k_0$, при котором система (1) переводится из $x[k]$ в x_1 к моменту N, удовлетворяющее неравенству

$$I\Big[u^0\big[k, x[k]\big];\, k;\, N\Big] - \mu^2[k] \leq 0\,, \tag{13}$$

где $I\Big[u^0\big[k, x[k]\big];\, k;\, N\Big] = \sum_{i=k}^{N-1} u^{0\top}\big[i, x[i]\big]\, u^0\big[i, x[i]\big]$, и $u^0\big[i, x[i]\big]$, $i = k, k+1, \ldots, N-1$, имеют вид (5). При этом величина $\mu^2[k]$ определяется на каждом шаге равенством

$$\begin{gathered}\mu^2[k] = \mu^2[k-1] - u^{0\top}\big[k-1, x[k-1]\big]\, u^0\big[k-1, x[k-1]\big] \\ (k \geq k_0+1).\end{gathered} \tag{14}$$

Из сделанных рассуждений следует, что справедливо следующее

Утверждение 3.1. *Пусть* $N = N\big(k, x[k]\big)$ *– наименьшее* $N \geq k_0$, *удовлетворяющее* (13), *а величина* $\mu^2[k]$ *выбирается в соответствии с* (14). *Тогда управление* (5) *является оптимальным управлением, найденным по принципу обратной связи в задаче* 3.2.

В §3.2 изучаются свойства времени быстродействия и функции $I\big[u^0;\, N\big]$. А именно, доказаны:

Теорема 3.1. *Пусть* N^0 *– оптимальное время окончания процесса управления в задаче* 3.1; $u^0(k)$, $k = k_0, k_0+1, \ldots, N^0-1$, *– соответствующее оптимальное по быстродействию программное управление;* $N^0\big(k, x^0[k]\big)$, $k \geq k_0$, *– время окончания процесса в задаче* 3.2; $u^0\big[k, x^0[k]\big]$ *– соответствующее оптимальное управление. Тогда справедливы равенства*

$$N^0\big(k, x^0[k]\big) = N^0, \quad u^0\big[k, x^0[k]\big] = u^0(k), \quad k = k_0, k_0+1, \ldots, N^0-1.$$

(*Иными словами, на оптимальном движении* $x^0[k]$ *совпадают времена быстродействия* $N^0 - k_0$ *и* $N^0\big(k, x^0[k]\big) - k_0$, *а также совпадают управления в задачах* 3.1 *и* 3.2).

Утверждение 3.2. *Пусть* $x(N) \equiv x_1 = 0$. *Тогда функция* $I\big[u^0;\, N\big] = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^{0\top}(k)\, u^0(k)$ *монотонно убывает при возрастании* N.

Геометрическая трактовка решения задач 3.1 и 3.2, использующая понятие области управляемости, содержится в §3.3. В частности, оказывается, что области управляемости при $x_1 = 0$ вложены одна в другую.

В §3.4 исследуется устойчивость построенного оптимального синтеза к помехам в каналах обратной связи, в случае, когда оптимальное время окончания процесса при наличии помех совпадает с временем окончания без помех. При этом определяющая роль принадлежит условию

$$I\left[u^0;\, k_0;\, N^0\right] < \mu^2(k_0). \tag{15}$$

Утверждение 3.3. *При выполнении условия* (15) *оптимальное время окончания процесса* $N^0\big(k,\, y(k)\big)$ *при наличии возмущений, ограниченных в каждый текущий момент времени согласно* (9), *удовлетворяет для любого* k, $k_0 \le k \le N^0 - 1$, *неравенству*

$$N^0\big(k,\, y(k)\big) \le N^0.$$

При этом, если $N^0\big(k,\, y(k)\big) = N^0$ *для* $k = k_0, k_0 + 1, \ldots, N^0 - 1$, *то оптимальный синтез* $u^0\big[k,\, x[k]\big]$ (5) *в задаче быстродействия устойчив к помехам в каналах обратной связи.*

Если же $I\left[u^0;\, N^0\right] = \mu^2(k_0)$, т.е. отсутствует запас ресурса, корректирующего влияние помех, то уже при $k = k_0$ может оказаться, что $N^0\big(k_0,\, y(k_0)\big) > N^0$, и устойчивость отсутствует. Иллюстрирующие этот факт примеры приведены в §3.5.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА посвящена вопросам управления квазилинейной дискретной системой

$$\begin{gathered} x(k+1) = A(k)\,x(k) + B(k)u(k) + f\big(k,\, x(k),\, u(k)\big), \\ k = k_0,\, k_0 + 1, \ldots, N - 1, \end{gathered} \tag{16}$$

в предположении, что соответствующая ей система первого приближения вполне управляема[12], а функция $f\big(k,\, x(k),\, u(k)\big)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\begin{aligned} \Big\| f\big(k,\, x^{(1)}(k),\, u^{(1)}(k)\big) - f\big(k,\, x^{(2)}(k),\, u^{(2)}(k)\big)\Big\| &\le \\ \le \alpha \left(\left\|x^{(1)}(k) - x^{(2)}(k)\right\| + \left\|u^{(1)}(k) - u^{(2)}(k)\right\|\right)&. \end{aligned}$$

Пусть задан отрезок времени $T = [k_0,\, N - 1]$.

В §4.1 ставится следующая задача:

Задача 4.1. Требуется найти управление $u^*(k)$, переводящее систему (16) из известного начального состояния $x(k_0) = x_0$ в известное конечное состояние $x(N)=x_1$ и такое, что конечна величина расходуемой энергии $I[u^*]=\sum_{k=k_0}^{N-1}u^{*\top}(k)\,u^*(k)$.

Далее, с учётом результатов первой главы, предлагается построение допустимого управления методом простой итерации как предела последовательности $\{x^{(q)}(k),\,u^{(q)}(k),\,k\in T\}$ решений линейных задач оптимального управления

$$x^{(q)}(k+1)=A(k)\,x^{(q)}(k)\;+\;B(k)u^{(q)}(k)+f\big(k,\,x^{(q-1)}(k),\,u^{(q-1)}(k)\big),$$

$$k=k_0,\,k_0+1,\dots,N-1,$$

$$I\big[u^{(q)}\big]=\sum_{k=k_0}^{N-1}u^{(q)\top}(k)\,u^{(q)}(k)\to\min_u.$$

Сходимость предложенной итерационной процедуры доказана с использованием принципа сжимающих отображений в §4.2.

Теорема 4.1. *Пусть управляемая система описывается уравнением* (16), *где функция* $f\big(k,x(k),u(k)\big)$ *определена и удовлетворяет условию Липшица по переменным* x, u *на* $T\times\mathbf{R}_n\times\mathbf{R}_m$, *и пусть система первого приближения, соответствующая* (16), *вполне управляема на отрезке* T. *Если постоянная Липшица достаточно мала, то равномерный относительно* k *предел последовательности* $\{x^{(q)}(k),\,u^{(q)}(k),\,k\in T\}$ *при* $q\to\infty$ *является решением задачи* 4.1.

В §4.3 на примере показана существенность условия малости постоянной Липшица.

Основные результаты диссертации.

1) С использованием псевдообратной матрицы найдено оптимальное программное управление, а также построен и обоснован оптимальный синтез для линейной дискретной системы при квадратичном по управлению критерии качества. Исследованы свойства оптимального синтеза, доказана его устойчивость при условии, что возмущения в каналах обратной связи достаточно малы. Обоснован оптимальный синтез и доказана его устойчивость при наличии запаздывания в каналах обратной связи.

2) Для линейной дискретной системы найдено решение задачи о быстродействии при квадратичном по управлению ограничении: построены оптимальное по быстродействию программное управление, а также оптимальное управление по принципу обратной связи. Изучены свойства времени быстродействия, дана геометрическая трактовка

решения задачи о быстродействии. Наконец, доказана устойчивость построенного оптимального синтеза к помехам в каналах обратной связи в случае, если оптимальное время окончания процесса при наличии помех совпадает на каждом шаге с временем окончания без помех, а также показана существенность последнего условия.
3) При условии малости постоянной Липшица обосновано построение допустимого управления квазилинейной дискретной системой как предела последовательности решений линейных задач оптимального управления.

Работы автора по теме диссертации

[1] SAZANOVA L.A. Optimal Control of Linear Discrete Systems // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2000. No. 2. P. S141-S157.

[2] САЗАНОВА Л.А. Устойчивость оптимального синтеза в задаче быстродействия // Известия вузов. Математика. 2002. № 2. С. 46-57.

[3] САЗАНОВА Л.А. Устойчивость оптимального синтеза в линейных дискретных системах при запаздывании сигналов обратной связи // Известия Уральского университета, Екатеринбург: Урал. госун-т. 2002. № 22. Вып. 4. С. 161-175.

[4] САЗАНОВА Л.А. Синтез оптимального управления в линейных дискретных системах // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тез. докл. 30-й Рег. мол. конф., Екатеринбург: УрО РАН. 1999. С. 66-67.

[5] САЗАНОВА Л.А. Устойчивость оптимального синтеза в задаче о быстродействии для линейных дискретных систем // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тез. докл. 31-й Рег. мол. конф. Екатеринбург: УрО РАН. 2000. С. 97-98.

[6] САЗАНОВА Л.А. Задача о быстродействии в линейных дискретных системах // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней школы. Саратов: Изд-во Саратовского госун-та. 2000. С. 124.

[7] САЗАНОВА Л.А. Множество разрешающих управлений для квазилинейной дискретной системы // Современные методы в теории краевых задач: Тез. докл. Воронежской весенней матем. школы "Понтрягинские чтения-XI". Воронеж: Изд-во Воронежского госун-та. 2000. С. 130.

[8] САЗАНОВА Л.А. Оптимальный синтез в линейных дискретных системах при запаздывании сигналов обратной связи // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всерос. науч. конф. Екатеринбург: Урал. госун-т. 2001. С. 182-183.

[9] АЛЬБРЕХТ Э.Г., САЗАНОВА Л.А. О сходимости одной итерационной процедуры вычисления допустимого управления в нелинейных системах // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всерос. науч. конф. Екатеринбург: Урал. госун-т. 2001. С. 127-128.

[10] АЛЬБРЕХТ Э.Г., САЗАНОВА Л.А. Об управлении одной нелинейной дискретной системой // Современные методы в теории краевых задач: Тез. докл. Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения-XII". Воронеж: Изд-во Воронежского госун-та. 2001. С. 8-9.

САЗАНОВА Лариса Анатольевна

ОБ УПРАВЛЕНИИ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ
АВТОРЕФЕРАТ

Подписано в печать 17.10.2002. Формат 64×84 1/16. Объём 1.2 п.л.
Тираж 100 экз. Заказ № 129
Размножено с готового оригинал-макета в типографии УрО РАН
620219 Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16.